# ЧИСЛО

ЧИСЛО, важнейшее понятие математики, которое используется для количественного описания разл. объектов и процессов. Возникнув в простейшем виде ещё в первобытном обществе, понятие Ч. изменялось на протяжении веков, постепенно обогащаясь содержанием по мере расширения сферы человеческой деятельности и связанного с ним расширения круга вопросов, требовавшего количественного описания и исследования.

Понятие натурального Ч., вызванное потребностью счёта предметов, возникло ещё в доисторич. времена. На низшей ступени развития первобытного общества понятие отвлечённого числа отсутствовало. В сознании первобытного человека ещё не сформировалось то общее, что есть в объектах такого рода, как, напр., «три человека», «три озера» и т. д. Источником возникновения понятия отвлечённого числа является примитивный счёт предметов, заключающийся в сопоставлении предметов данной конкретной совокупности с предметами некоторой определённой совокупности, играющей как бы роль эталона. У большинства народов первым таким эталоном являются пальцы («счёт на пальцах»), что подтверждается языковедческим анализом названий первых чисел. На этой ступени Ч. становится отвлечённым, не зависящим от качества считаемых объектов.

С развитием письменности возможности записи Ч. значительно расширились. Сначала Ч. стали обозначаться чёрточками на материале, служащем для записи. Затем были введены другие знаки для больших Ч. Вавилонские клинописные обозначения Ч., так же как и сохранившиеся до наших дней римские цифры, ясно свидетельствуют именно об этом пути формирования обозначений для Ч. Крупным шагом вперёд было изобретение в Индии позиционной системы счисления, позволяющей записать любое натуральное Ч. при помощи десяти знаков – цифр.

Важным шагом в развитии понятия натурального Ч. является осознание бесконечности натурального ряда Ч., т. е. потенциальной возможности его бесконечного продолжения. Отчётливое представление о бесконечности натурального ряда встречается в трудах *Архимеда* и *Евклида*. С развитием понятия натурального Ч. как результата счёта предметов в обиход включаются действия над Ч. – сложение, вычитание, умножение и деление. Лишь в многовековом опыте сложилось представление об отвлечённом характере этих действий, о независимости количественного результата действия от природы предметов, составляющих совокупности. Начинается развитие науки о Ч. – *арифметики*. В самом процессе развития арифметики появляется потребность в изучении свойств Ч. как таковых, в выяснении всё более сложных закономерностей в их взаимосвязях, обусловленных наличием действий. Начинается детализация понятия натурального Ч., выделяются классы чётных и нечётных Ч., простых и составных Ч. и т. д. Изучение глубоких закономерностей в натуральном ряду Ч. продолжается поныне и составляет раздел математики, носящий назв. *чисел теории*.

Натуральные Ч., кроме осн. функции – характеристики количества предметов, выполняют ещё др. функцию – характеризуют порядок предметов, расположенных в ряд. Возникающее в связи с этой функцией понятие порядкового Ч. (первый, второй и т. д.) тесно переплетается с понятием количественного Ч. (один, два и т. д.).

Вопрос об обосновании понятия натурального Ч. долгое время в математике не ставился. Понятие натурального Ч. столь привычно и просто, что не возникало потребности в его определении в терминах к.-л. более простых понятий. Лишь в сер. 19 в. под влиянием развития аксиоматич. метода в математике, с одной стороны, и критич. пересмотра основ математич. анализа – с другой, назрела необходимость обоснования понятия количественного натурального Ч. Отчётливое определение понятия натурального Ч. на основе понятия множества (совокупности предметов) было дано в 1870-х гг. в работах Г. *Кантора*. Сначала он определяет понятие равномощности совокупностей. Именно, две совокупности называются равномощными, если составляющие их предметы могут быть сопоставлены по одному. Затем число предметов, составляющих данную совокупность, определяется как то общее, что имеет данная совокупность и всякая другая, равномощная ей совокупность предметов, независимо от всяких качественных особенностей этих предметов. Такое определение отражает сущность натурального Ч. как результата счёта предметов, составляющих данную совокупность. Определение, данное Кантором, было отправным пунктом для обобщения понятия количественной характеристики бесконечных множеств. Другое обоснование понятия натурального Ч. было предложено Дж. *Пеано*.

Исторически первым расширением понятия Ч. является присоединение к натуральным Ч. дробных Ч. Введение в употребление дробных Ч. связано с потребностью производить измерения. С развитием арифметики как науки о Ч. созревает идея рассмотрения дробей с любым натуральным знаменателем и представление о дробном Ч. как о частном при делении двух натуральных Ч., из которых делимое не делится нацело на делитель (см. *Дробь*).

Дальнейшие расширения понятия Ч. обусловлены уже не непосредственными потребностями счёта и измерения, но явились следствием развития математики.

Введение отрицательных Ч. было вызвано развитием *алгебры* как науки, дающей общие способы решения арифметич. задач, независимо от их конкретного содержания и исходных числовых данных. Необходимость введения отрицательных Ч. возникает уже при решении задач, сводящихся к линейным уравнениям с одним неизвестным. Возможный отрицательный ответ в задачах такого рода может быть истолкован на примерах простейших направленных величин (в задачах, связанных с движением, – передвижение в направлении, противоположном выбранному, в задачах, связанных с вычислением прибыли, – долг и т. д.). В Индии ещё в 6–11 вв. отрицательные Ч. систематически применялись при решении задач и истолковывались в осн. так же, как и ныне. В европ. науке отрицательные Ч. окончательно вошли в употребление лишь с времени Р. *Декарта* (17 в.), давшего геометрич. истолкование отрицательных Ч. как направленных отрезков. Создание Декартом аналитич. геометрии, позволившей рассматривать корни уравнения как координаты точек пересечения некоторой кривой с осью абсцисс, окончательно стёрло принципиальное различие между положительным и отрицательным корнями уравнения.

Ч. целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль получили общее название рациональных Ч. Совокупность рациональных Ч. обладает свойством замкнутости по отношению к четырём арифметич. действиям. Это значит, что сумма, разность, произведение и частное (кроме частного при делении на нуль, которое не имеет смысла) любых двух рациональных Ч. являются снова рациональными Ч. Совокупность рациональных Ч. упорядочена в отношении понятий «больше» и «меньше». Совокупность рациональных Ч. обладает свойством плотности: между двумя разл. рациональными числами находится бесконечно много рациональных Ч. Это даёт возможность при помощи рациональных Ч. осуществлять измерение (напр., длины отрезка с выбранной единицей масштаба) с любой степенью точности. Таким образом, совокупность рациональных Ч. оказывается достаточной для удовлетворения мн. практич. потребностей.

Совокупность рациональных Ч. оказалась недостаточной для изучения непрерывно изменяющихся переменных величин. Здесь оказалось необходимым новое расширение понятия Ч., заключающееся в переходе от множества рациональных Ч. к множеству действительных (вещественных) Ч. Этот переход состоит в присоединении к рациональным Ч. так называемых иррациональных чисел.

В 17 в., в период зарождения совр. науки и, в частности, совр. математики, разрабатывается ряд методов изучения непрерывных процессов. Отчётливое определение понятия действительного числа даётся И. *Ньютоном* во «Всеобщей арифметике» (опубл. в 1707): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Эта формулировка даёт единое определение действительного Ч., рационального или иррационального.

В дальнейшем, в 1870-х гг., понятие действительного Ч. было уточнено на основе глубокого анализа понятия непрерывности в работах Р. *Дедекинда*, Г. Кантора и К. *Вейерштрасса*.

По Дедекинду, свойство непрерывности прямой линии заключается в том, что если все точки, составляющие прямую, разбить на два класса так, что каждая точка первого класса лежит левее каждой точки второго класса («разорвать» прямую на две части), то либо в первом классе существует самая правая точка, либо во втором классе – самая левая точка, т. е. точка, по которой произошёл «разрыв» прямой.

Совокупность всех рациональных Ч. свойством непрерывности не обладает. Так будет, напр., если в первый класс отнести все отрицательные рациональные Ч., нуль и все положительные рациональные Ч., квадрат которых меньше двух, а во второй – все положительные рациональные Ч., квадрат которых больше двух. Такое *дедекиндово сечение* называется иррациональным. Затем даётся следующее определение иррационального Ч.: каждому иррациональному сечению в совокупности рациональных Ч. сопоставляется иррациональное Ч., которое считается большим, чем любое Ч. первого класса, и меньшим, чем любое Ч. второго класса. Совокупность всех действительных Ч. (рациональных и иррациональных) уже обладает свойством непрерывности.

Обоснование Г. Кантора понятия действительного Ч. отличается от обоснования Р. Дедекинда, но также основывается на анализе понятия непрерывности.

Заключительным этапом в развитии понятия Ч. явилось введение комплексных Ч. По-видимому, впервые идея комплексного Ч. возникла в 16 в. (итал. учёные Р. Бомбелли, Дж. *Кардано*) в связи с открытием алгебраич. решения уравнений 3-й и 4-й степеней. Известно, что уже решение квадратного уравнения иногда приводит к действию извлечения квадратного корня из отрицательного Ч., невыполнимому в области действительных Ч. Но это происходит только в случае, если уравнение не имеет действительных корней. Практич. задача, приводящая к решению такого квадратного уравнения, оказывается не имеющей решения. С открытием алгебраич. решения уравнений 3-й степени обнаружилось следующее удивительное обстоятельство. Как раз в том случае, когда все три корня уравнения являются действительными Ч., по ходу вычислений оказывается необходимо выполнить действие извлечения квадратного корня из отрицательного Ч. Возникающая при этом «мнимость» исчезает только по выполнении всех последующих действий. Это обстоятельство явилось первым стимулом к рассмотрению комплексных Ч. Однако комплексные Ч. и действия над ними с трудом прививались в деятельности математиков. Остатки недоверия к законности пользования ими отражаются в сохранившемся до наших дней термине «комплексное Ч.». Это недоверие рассеялось лишь после установления в кон. 18 в. геометрич. истолкования комплексных Ч. в виде точек на плоскости и установления несомненной пользы от введения комплексных Ч. в теории алгебраич. уравнений, особенно после работ К. *Гаусса*. Ещё до Гаусса в работах Л. *Эйлера* комплексные Ч. стали играть существенную роль не только в алгебре, но и в математич. анализе. Эта роль стала исключительно большой в 19 в. в связи с развитием теории функций комплексного переменного.

Совокупность всех комплексных Ч. обладает, так же как совокупность действительных Ч. и совокупность рациональных Ч., свойством замкнутости по отношению к действиям сложения, вычитания, умножения и деления. Более того, совокупность всех комплексных Ч. обладает свойством алгебраич. замкнутости, заключающейся в том, что каждое алгебраич. уравнение с комплексными коэффициентами имеет корни снова в области всех комплексных Ч. Как установлено К. Вейерштрассом, совокупность всех комплексных Ч. не может быть далее расширена за счёт присоединения новых Ч. так, чтобы в расширенной совокупности сохранились все законы действий, имеющие место в совокупности комплексных чисел.

## Литература

Лит.: Нечаев В. И. Числовые системы. М., 1975.